digitのblockによって定義されるベキ級数の代数的独立性(解析的整数論)

内田, 佳久

数理解析研究所講究録
961 巻 1996 年 150-160

digit の block によって定義されるベキ級数の代数的独立性

慶應義塾大学理工　内田佳久 (Yoshihisa Uchida)

1　準備

q を 2 以上の整数とする, W を $0, 1, \ldots,$ または $q-1$ からなる長さ有限の block の全体とする. 即ち

$$W := \{ b_1 \cdots b_l \mid b_i \in \{ 0, 1, \ldots, q-1 \}, \ l \geq 1 \}.$$

$w = b_1 \cdots b_l \in W$ $(b_i \in \{ 0, 1, \ldots, q-1 \})$ に対して $|w| := l$,

$$v(w) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{l} b_i q^{l-i} & (w \neq 0^l) \\ q^l & (w = 0^l) \end{cases}$$

とおく. ここで $0^l = \overbrace{0 \cdots 0}^{l}$ とする. $w \in W$ と正整数 n に対し, $e(w; n)$ を n の q進展開

$$n = a_k a_{k-1} \cdots a_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i q^i \qquad (a_i \in \{ 0, 1, \ldots, q-1 \}, \ a_k \neq 0)$$

に現れる wの個数とする. 但し $w \neq 0^l$ $(l \geq 1)$ のときは, a_k の前に 0 がいくつか並んでいるものとし, $w = 0^l$ のときはこの様な修正は行わない (Allouche and Shallit [1] 参照). 即ち $|w| = l$ のとき

$$e(w; n) := \sharp\{ i \leq k \mid a_{i+l-1} \cdots a_i = w \}.$$

但し $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 0$. また任意の $w \in W$ に対して $e(w; 0) = 0$ と定める.

定義より次の等式が成り立つ. $w \in W$, $|w| = l$ とすると, 任意の $n \geq 0$ に対

して

$$e(w;n) = \sum_{b=0}^{q-1} e(bw;n)\ , \tag{1}$$

$$e(w;n) = \sum_{b=0}^{q-1} e(wb;n) + \begin{cases} 1 & (\ n \equiv v(w) \pmod{q^l}) \\ 0 & (\ \text{その他}\ ). \end{cases} \tag{2}$$

また少なくとも一方が 0 でない整数 m, $n \geq 0\ (m < q^l)$ に対して

$$e(w;q^l n + m) = e(w;q^{l-1}n + [m/q]) + \begin{cases} 1 & (\ m \equiv v(w) \pmod{q^l}) \\ 0 & (\ \text{その他}\ ). \end{cases} \tag{3}$$

本論文において数列 $\{\, e(w;n)\,\}_{n\geq 0}$ で生成された巾級数

$$f(w;z) := \sum_{n\geq 0} e(w;n) z^n$$

及びその代数的数における値の代数的独立性を論ずる. なお数列 $\{\, e(w;n)\,\}_{n\geq 0}$ は, いわゆる $q-regular$ 数列 (Allouche and Shallit [2] 参照) である. $q-regular$ 数列の生成するベキ級数の値については Becker [3] が一般的な結果を得ているので参照されたい.

2 関数 $f(w;z)$ の超越性

定理 1 任意の $w \in W$ に対して, $f(w;z)$ は $\mathbb{C}(z)$ 上超越的で次の関数方程式を満たす.

$$f(w;z) = \frac{1-z^q}{1-z} f(w;z^q) + \frac{z^{v(w)}}{1-z^{q^{|w|}}}. \tag{4}$$

証明 簡単のため $l = |w|$,

$$m_0 = \begin{cases} v(w) & (w \neq 0^l), \\ 0 & (w = 0^l), \end{cases} \qquad \delta = \begin{cases} 1 & (m_0 \neq 0), \\ 0 & (m_0 = 0), \end{cases}$$

とおき，（3）を用いると

$$
\begin{aligned}
f(w;z) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{q^{l-1}-1}\sum_{r=0}^{q-1} e(w;q^l n+qm+r)z^{q^l n+qm+r} \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{q^{l-1}-1}\sum_{r=0}^{q-1} e(w;q^{l-1}n+m)z^{q^l n+qm+r}+\delta z^{m_0}+\sum_{n\geq 1} z^{q^l n+m_0} \\
&= \frac{1-z^q}{1-z}\sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{q^{l-1}-1} e(w;q^{l-1}n+m)(z^q)^{q^{l-1}n+m}+\delta z^{m_0}+\frac{z^{q^l+m_0}}{1-z^{q^l}} \\
&= \frac{1-z^q}{1-z}f(w;z^q)+\frac{z^{v(w)}}{1-z^{q^l}}.
\end{aligned}
$$

以上で関数方程式（4）が証明された.

さて，$f(w;z)$ を $\mathbb{C}(z)$ 上代数的と仮定する．$f(z)=(1-z)f(w;z)$ とおくと関数方程式（4）は

$$
f(z)=f(z^q)+r(z) \qquad (r(z)\in\mathbb{C}(z))
$$

となる．従って Kubota [4, Corollary 9] 又は Loxton and van der Poorten [5, Theorem 2] により $f(z)$，従って $f(w;z)$，は有理関数となる．そこで $f(w;z)=a(z)/b(z)$ とおく．但し $a(z)$，$b(z)$ は，$\mathbb{C}$ 上の多項式で互いに素とする．（4）より

$$
(1-z^{q^l})a(z)b(z^q)=(1+z+\cdots+z^{q-1})(1-z^{q^l})a(z^q)b(z)+z^{v(w)}b(z)b(z^q).
$$

上式に $z=1$ を代入して $b(1)=0$ を得る．$(a(z),b(z))=1$ より，$a(1)\neq 0$ となる．

$$
b(z)=(1-z)^N b_1(z) \qquad (b_1(z)\in\mathbb{C}[z]\,,\ b_1(1)\neq 0\,,\ N\geq 1)
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
(1-z^{q^l})(1-z^q)^N a(z)b_1(z^q) &= (1+z+\cdots+z^{q-1})(1-z^{q^l})(1-z)^N a(z^q)b_1(z) \\
&+ z^{v(w)}(1-z)^N(1-z^q)^N b_1(z)b_1(z^q).
\end{aligned}
$$

両辺を $(1-z)^N(1-z^q)$ で割り

$$
\begin{aligned}
&(1+z+\cdots+z^{q^l-1})(1+z+\cdots+z^{q-1})^{N-1}a(z)b_1(z^q) \\
&\quad =(1+z+\cdots+z^{q^l-1})a(z^q)b_1(z)+z^{v(w)}(1-z^q)^{N-1}b_1(z)b_1(z^q).
\end{aligned}
$$

$z=1$ を代入すると，$N\geq 2$ のとき $q^{N-1}=1$，$N=1$ のとき $b_1(1)=0$ となり，いずれの場合も矛盾を生ずる．以上で $f(w;z)$ の $\mathbb{C}(z)$ 上の超越性が示された.

Mahler [6] より次の系を得る.

系　任意の代数的数 α $(0<|\alpha|<1)$ に対して $f(w;\alpha)$ は超越数である.

3　関数 $f(w_1;z)$, . . . , $f(w_m;z)$ の代数的独立性

$w_1,\dots,w_m\in W$ とする. $f_i(z)=(1-z)f(w_i;z)$ とおくと定理1より各 $f_i(z)$ は,

$$f_i(z)=f_i(z^q)+r_i(z) \qquad (r_i(z)\in\mathbb{C}(z))$$

の型の関数方程式を満たす. 従って Mahler [7] より, 関数 $f(w_1;z),\dots,f(w_m;z)$ が $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立であるならば, 代数的数 α $(0<|\alpha|<1)$ に対して関数値 $f(w_1;\alpha),\dots,f(w_m;\alpha)$ は代数的独立となる. 従って問題は $f(w_1;z),\dots,f(w_m;z)$ の $\mathbb{C}(z)$ 上の代数的独立性に帰着されるが, Kubota [4, Corollary 9] 又は Loxton and van der Poorten [5, Theorem 2] により, これは mod $\mathbb{C}(z)$ での $\mathbb{C}$ 上の線形独立性に同値となる.

定理2　$w_1,\dots,w_m\in W$, $l=\max\{|w_1|,\dots,|w_m|\}$ とする. このとき次の3条件は同値である.

(i) $f(w_1;z),\dots,f(w_m;z)$ は mod $\mathbb{C}(z)$ で $\mathbb{C}$ 上線形従属である.

(ii) 全てが0ではない $c_1,\dots,c_m\in\mathbb{C}$ が存在して, 数列 $\left\{\sum_{i=1}^{m}c_ie(w_i;n)\right\}_{n\geq 0}$ が周期 q^{l-1} の周期列となる.

(iii) 整数 n に対して n^* を $n\equiv n^* \pmod{q^{l-1}}$ $(0\leq n^*<q^{l-1})$ により定める. このとき, 行列 $(\,e(w_i;n)-e(w_i;n^*)\,)_{1\leq i\leq m\,,\,q^{l-1}\leq n\leq q^l}$ の階数は $m-1$ 以下である.

注意　与えられた $w_1,\dots,w_m\in W$ に対して (iii) は有限回の手続きで検証される.

系　$w_1,\dots,w_m\in W$ が定理2の条件を満たさないとき, 代数的数 α $(0<|\alpha|<1)$ に対して, $f(w_1;\alpha),\dots,f(w_m;\alpha)$ は代数的独立である.

証明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 条件 (i) より, 全てが0でない $c_1,\dots,c_m\in\mathbb{C}$ と $r(z)\in\mathbb{C}(z)$

が存在して

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f(w_i; z) = r(z) \tag{5}$$

となる．z に z^q を代入して

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f(w_i; z^q) = r(z^q).$$

ここで（4）より

$$f(w_i; z^q) = \frac{1-z}{1-z^q}(f(w_i; z) - d_i(z)) \quad (1 \le i \le m).$$

但し

$$d_i(z) = \frac{z^{v_i}}{1-z^{q^{l_i}}}, \; v_i = v(w_i), \; l_i = |w_i| \quad (1 \le i \le m)$$

と書けるから,

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \frac{1-z}{1-z^q}(f(w_i; z) - d_i(z)) = r(z^q).$$

即ち

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f(w_i; z) = \frac{1-z^q}{1-z} r(z^q) + \sum_{i=1}^{m} c_i d_i(z).$$

上式を（5）に代入して

$$r(z) = \frac{1-z^q}{1-z} r(z^q) + \sum_{i=1}^{m} c_i d_i(z)$$

を得る．右辺の第２項は

$$\sum_{i=1}^{m} c_i d_i(z) = \frac{P(z)}{1-z^{q^l}}$$

と書ける．但し

$$P(z) \in \mathbb{C}[z] \;, \; \deg P(z) \le \max_{1 \le i \le m} \{ v_i + q^l - q^{l_i} \} \le q^l. \tag{6}$$

従って

$$r(z) = \frac{1-z^q}{1-z} r(z^q) + \frac{P(z)}{1-z^{q^l}}. \tag{7}$$

以下で

$$R(z) := (1 - z^{q^{l-1}}) r(z) \in \mathbb{C}[z] \tag{8}$$

$$\deg R(z) < q^{l-1} \tag{9}$$

を示す．(8) を示すためには，$r(z)$ の極が 1 の q^{l-1} 乗根であり，しかも全て単純極であることをいえばよい．(7) より 0 は $r(z)$ の極ではない．$r(z)$ が 1 の q^{l-1}乗根でない極をもつとし，そのうち偏角最小のものを1つとり ξ とする．但し，偏角は $(0, 2\pi]$ の間にとるものとする．ξ_1 を ξ の q 乗根で $\arg\xi_1 = (\arg\xi)/q$ を満たすものとすると，ξ_1 は $r(z)$ の極ではない．他方 ξ_1 は $\xi_1^q = \xi \neq 1$ より $r(z^q)(1-z^q)/(1-z)$ の極となるが，${\xi_1}^{q^l} = \xi^{q^{l-1}} \neq 1$ より $P(z)/(1-z^{q^l})$ の極ではない．従って (7) より ξ_1 は $r(z)$ の極となり矛盾が導かれる．従って $r(z)$ の極は 1 の q^{l-1} 乗根である．次に $r(z)$ の極が全て単純であることを示す．まず $z=1$ が $r(z)$ の高々1位の極であることに注意しておく．実際1が$r(z)$ の $N(\geq 2)$ 位の極とし，$s(z)=(1-z)^N r(z)$ とおくと $s(1) \neq 0$ である．(7) より

$$\frac{s(z)}{(1-z)^N} = \frac{1-z^q}{1-z}\frac{s(z^q)}{(1-z^q)^N} + \frac{P(z)}{1-z^{q^l}}.$$

従って

$$s(z) = \frac{s(z^q)}{(1+z+\cdots+z^{q-1})^{N-1}} + \frac{(1-z)^{N-1}P(z)}{1+z+\cdots+z^{q^l-1}}.$$

上式で $z=1$ とすることにより，$1 = q^{-N+1}$．これは $N \geq 2$ に矛盾する．さて $r(z)$ が2位以上の極をもつとし，そのうち偏角最小のものを1つとり，ξ とする (偏角の範囲は前と同じ)，ξ_1 を ξ の q 乗根で，$\arg\xi_1 = (\arg\xi)/q$ をみたすものとすると，ξ_1 は $r(z)$ の高々1位の極である．他方上の注意より，${\xi_1}^q = \xi \neq 1$ であるから，ξ_1 は $r(z^q)(1-z^q)/(1-z)$ の2位以上の極であるが，${\xi_1}^q = \xi$ が1の q^{l-1} 乗根であることから $P(z)/(1-z^{q^l})$ の高々1位の極である．従って (7) より ξ_1 は $r(z)$ の2位以上の極となるが，これは矛盾．従って $r(z)$ の極は全て単純である．以上で (8) が示された．次に (9) を示す．(7)，(8) より

$$\frac{R(z)}{1-z^{q^{l-1}}} = \frac{1-z^q}{1-z}\frac{R(z^q)}{1-z^{q^l}} + \frac{P(z)}{1-z^{q^l}}.$$

従って

$$\frac{1-z^{q^l}}{1-z^{q^{l-1}}}R(z) = \frac{1-z^q}{1-z}R(z^q) + P(z) \tag{10}$$

を得る．ここで

$$\deg \frac{1-z^{q^l}}{1-z^{q^{l-1}}} R(z) \geq \deg \frac{1-z^q}{1-z} R(z^q)$$

の場合は

$$q^l - q^{l-1} + \deg R(z) \geq q - 1 + q \deg R(z)$$

となり（9）が成り立つ．他の場合は（10）より

$$\deg \frac{1-z^q}{1-z} R(z^q) = \deg P(z)$$

が成り立たなければならない．従って（6）より

$$q - 1 + q \deg R(z) \leq q^l$$

となり，いずれの場合も（9）を得る．

（5），（8）及び（9）より，$r(z) = R(z)/(1-z^{q^{l-1}})$ の係数 $\left\{ \sum_{i=1}^{m} c_i e(w_i; n) \right\}_{n \geq 0}$ は周期 q^{l-1} の周期列である．

(ii) ⇒ (i)．明らか．

(ii) ⇒ (iii)．$c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ を条件（ii）を満たす様にとると

$$\sum_{i=1}^{m} c_i (e(w_i; n) - e(w_i; n^*)) = 0 \quad (n \geq 0)$$

が成り立つ．特に（iii）の行列の m 個の列ベクトルは $\mathbb{C}$ 上線形従属である．

(iii) ⇒ (ii)．(iii) より全てが 0 ではない $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ が存在して，$\gamma_n := \sum_{i=1}^{m} c_i e(w_i; n)$ とおくとき

$$\gamma_n = \gamma_{n^*} \tag{11}$$

が全ての n $(0 \leq n \leq q^l)$ に対して成り立つ．(ii) を示すには，(11) が全ての n について成立すればよい．$n > q^l$ とし，(11) が $n-1$ 以下まで成り立つとする．$n = q^l k + n'$ $(k \geq 0\,,\ 0 \leq n' < q^l)$ とかく．任意の $i\,(1 \leq i \leq m)$ に対して，$n \equiv n'$ $(\mathrm{mod}\ q^{l_i})$ であるから（3）より

$$e(w_i; n) - e(w_i; [n/q]) = e(w_i; n') - e(w_i; [n'/q]).$$

つまり

$$e(w_i; n) - e(w_i; n') = e(w_i; [n/q]) - e(w_i; [n'/q]).$$

従って

$$\gamma_n - \gamma_{n'} = \gamma_{[n/q]} - \gamma_{[n'/q]}. \tag{12}$$

ここで $[n/q]^* = [n'/q]$ であるから，帰納法の仮定より（12）の右辺は 0 となる．即ち

$$\gamma_n = \gamma_{n'}.$$

$n^* = n'^*$ であるから，帰納法の仮定より

$$\gamma_n = \gamma_{n^*}.$$

以上で，定理が証明された．

W の部分集合 V に対して

$$L(V) := \left\{ c(z) + \sum_{i=1}^{m} c_i f(w_i; z) \;\middle|\; w_1, \ldots, w_m \in V,\ c(z) \in \mathbb{C}(z),\ c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C},\ m \geq 1 \right\}$$

とおく．$L(V)$ は $\mathbb{C}$ 上の線形空間である．

定理 3　正整数 l に対して $W_l := \{\, w \in W \mid |w| \leq l \}$,

$$W_l^* := \{\, bw \in W \mid b \in \{\, 1, \ldots, q-1 \}\,,\ |bw| = l \,\} \cup \{\, 0^l \,\}$$

とおくとき，$\{\, f(w; z) \mid w \in W_l^* \,\}$ は mod $\mathbb{C}(z)$ で $L(W_l)$ の基底である．

証明　W_l^* を $W_l^* = \{\, w_0 = 0^l, w_1, \ldots, w_m \}$　（但し $m = \sharp W_l^* - 1$）とかく．まず

$$\sum_{i=0}^{m} c_i f(w_i; z) \equiv 0 \pmod{\mathbb{C}(z)} \qquad (c_i \in \mathbb{C})$$

と仮定し，$c_1 = \cdots = c_m = 0$ を示す．任意の j $(1 \leq j \leq m)$ をとる．

$$w_j = b_1 \cdots b_l \quad (\, b_1, \ldots, b_l \in \{\, 0, 1, \ldots, q-1 \,\}\,,\ b_1 \neq 0\,)$$

とし，$n = \sum_{i=2}^{l} b_i q^{l-i}$ とおくと，$v(w_j) \equiv n \pmod{q^{l-1}}$ であるから，定理 2（ii）より

$$\sum_{i=0}^{m} c_i e(w_i; v(w_j)) = \sum_{i=0}^{m} c_i e(w_i; n)$$

を得る．$n < q^l$ であるから上式の右辺は 0 となる．他方左辺において，$b_1 \neq 0$ より $e(w_i; v(w_j)) \neq 0$ となるのは $i = j$ のときに限る．よって $c_j = 0$ $(1 \leq j \leq m)$．従って

$$\mathbb{C}(z) \ni \sum_{i=0}^{m} c_i f(w_i; z) = c_0 f(w_0; z).$$

ところが定理 1 より，$f(w_0; z) \notin \mathbb{C}(z)$ であるから $c_0 = 0$ となる．

次に $L(W_l) = L(W_l^*)$ を示す．$l = 1$ のときは $W_l^* = \{0, 1, \dots, q-1\} = W_1$ であるから，この式は成り立つ．$l > 1$ とし $L(W_{l-1}) = L(W_{l-1}^*)$ とする．$w \in W_{l-1}^*$ を任意にとる．もし w が 0 で始まっていないならば，$w0, \dots, w(q-1) \in W_l^*$ であり，(2) より

$$f(w; z) = \sum_{b=0}^{q-1} f(wb; z) + \frac{z^{v(w)}}{1 - z^{q^{l-1}}} \in L(W_l^*).$$

w が 0 から始まっているならば，$w = 0^{l-1}$ でなければならないので $0w, \dots, (q-1)w \in W_l^*$ となる．すると (1) より

$$f(w; z) = \sum_{b=0}^{q-1} f(bw; z) \in L(W_l^*).$$

従って

$$L(W_{l-1}) = L(W_{l-1}^*) \subset L(W_l^*).$$

$|w| = l$ となる $w \in W_l \setminus W_l^*$ の場合が残る．$w = 0x$ $(x \in W_{l-1})$ と書けるから (1) より

$$f(w; z) = f(0x; z) = f(x; z) - \sum_{b=1}^{q-1} f(bx; z) \in L(W_l^*).$$

従って $L(W_l) = L(W_l^*)$．以上で定理が証明された．

定理 4　$W^* := \{\, b_1 \cdots b_l \mid b_i \in \{0, \dots, q-1\},\ b_1 \neq 0,\ b_l \neq 0,\ l \geq 1\} \cup \{0\}$ とおくとき，$\{\, f(w; z) \mid w \in W^* \,\}$ は mod $\mathbb{C}(z)$ で $L(W)$ の基底である．

証明　まず任意の $w_1, \dots, w_m \in W^*$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f(w_i; z) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathbb{C}(z)) \quad (c_i \in \mathbb{C})$$

と仮定し，$c_1 = \cdots = c_m = 0$ を示す．$m = 1$ のときは定理 1 より正しい．$m > 1$ とし，$m - 1$ まではこの主張が正しいとする．$l = \max\{\, |w_1|, \dots, |w_m| \,\}$ とおく．

$w_1 \neq 0$, $|w_1| = \min\{\,|w_i| \mid w_i \neq 0\,,\ 1 \leq i \leq m\}$ としてよい．任意の $k \geq l$ に対して $n_k = v(w_1 0^k)$ とおく．$n_k \equiv 0 \pmod{q^{l-1}}$ であるから定理２（ii）より

$$\sum_{i=1}^{m} c_i e(w_i; n_k) = \sum_{i=1}^{m} c_i e(w_i; 0) = 0.$$

左辺において，$e(w_1; n_k) = 1$．また $w_i \neq 0\ (2 \leq i \leq m)$ のときは $e(w_i; n_k) = 0$ であるから $c_1 = 0$ を得る．他方 $w_i = 0$ となる i が存在するときは，$e(w_i; n_k) = e(0; v(w_1)) + k$となるから

$$c_1 + c_i(e(0; v(w_1)) + k) = 0.$$

$k \to \infty$ として $c_i = 0$．従って $c_1 = 0$ となる．故に

$$\sum_{i=2}^{m} c_i f(w_i; z) \in \mathbb{C}(z)$$

であり，帰納法の仮定から $c_2 = \cdots = c_m = 0$ となる．

次に $L(W) = L(W^*)$ を示す．任意に $w \in W$ をとり，

$$w = 0^k x 0^l \qquad (k\,,\, l \geq 0\,,\ x \in (W^* \setminus \{0\}) \cup \{\lambda\})$$

と書く．但し λ はempty block とする．$k+l$ に関しての数学的帰納法で $f(w; z) \in L(W^*)$ を示す．$k+l = 0$ ならば，$w = x \in W^*$ であるから正しい．続いて $k+l > 0$ とする．$0 \leq k' + l' < k+l$ を満たす $k'\,,\, l' \geq 0$ 及び，任意の $y \in (W^* \setminus \{0\}) \cup \{\lambda\}$ に対して $f(0^{k'} y 0^{l'}; z) \in L(W^*)$ と仮定する．$k \geq 1$ ならば（1）より

$$f(w; z) = f(0^k x 0^l; z) = f(0^{k-1} x 0^l; z) - \sum_{b=1}^{q-1} f(b 0^{k-1} x 0^l; z).$$

$0 \leq l < k + l$, $x \neq 0$ より

$$f(0^{k-1} x 0^l; z)\,,\ f(b 0^{k-1} x 0^l; z) \in L(W^*) \qquad (1 \leq b \leq q-1).$$

従って $f(w; z) \in L(W^*)$ である．$k = 0$ のときは（2）より

$$f(w; z) = f(x 0^l; z) \equiv f(x 0^{l-1}; z) - \sum_{b=1}^{q-1} f(x 0^{l-1} b; z) \pmod{\mathbb{C}(z)}.$$

ここで $x \neq 0$ より

$$f(x 0^{l-1}; z)\,,\ f(x 0^{l-1} b; z) \in L(W^*) \quad (1 \leq b \leq q-1)$$

であるから $f(w; z) \in L(W^*)$ となる．従って $L(W) = L(W^*)$．以上で定理が証明された．

References

[1] J. P. Allouche and J. O. Shallit, Infinite products associated with counting blocks in binary strings, J. London Math. Soc. 39(1989), 193 – 204.

[2] J. P. Allouche and J. O. Shallit, The ring of k-regular sequences, Theoret. Comp. Sci. 98(1992), 163 – 197.

[3] P. G. Becker, k-regular power series and Mahler-type functional equations, J. Number Theory 49(1994), 269 – 286.

[4] K. K. Kubota, On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values, Math. Ann. 227(1977), 9 – 50.

[5] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, A class of hypertranscendental functions, Aequationes Math. 16(1977), 93 – 106.

[6] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, Math. Ann. 101(1929), 342 – 366.

[7] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen, Math. Z. 32(1930), 545 – 585.